Samenvatting

Motieven. Zij X een projectieve algebraïsche variëteit gedefinieerd over het lichaam $\mathbf{Q}$ van rationale getallen. Laten we aannemen dat X glad is. Voor elk natuurlijk getal i definieert men

- het i-de *Betti getal* van X: een natuurlijk getal b_i;
- de *étale cohomologie* van X: een continue representatie van de absolute Galois groep

  $$\rho_i(X) : \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^a/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}(b_i, \mathbf{A}^f)$$

  waarbij $\mathbf{A}^f = \hat{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}$ de ring van eindige rationale adèles is;
- de *periode matrix* van X: een dubbele nevenklasse

  $$P_i(X) \in \mathrm{GL}(b_i, \mathbf{Q}) \backslash \mathrm{GL}(b_i, \mathbf{C}) / \mathrm{GL}(b_i, \mathbf{Q}).$$

Bijvoorbeeld, voor de projectieve lijn $X = \mathbf{P}^1$ geldt dat $b_0 = b_2 = 1$ en alle andere b_i zijn nul. De representatie ρ_0 is triviaal, en de representatie ρ_2 is duaal aan het *cyclotomische karakter*

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^a/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}((\varprojlim \mu_m) \otimes \mathbf{Q})$$

waarbij

$$\mu_m = \{e^{\frac{2\pi i k}{m}} | k \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}\}.$$

De periode matrix P_0 is de eenheidsmatrix matrix (1), en de periode matrix P_2 is de matrix $(2\pi i)$. Als we voor X in plaats van de projectieve lijn een elliptische kromme kiezen, dan verandert er niks voor $i = 0$ en $i = 2$, maar wordt $b_1 = 2$, wordt ρ_1 de rang twee representatie op het

Tate moduul van E en wordt P_2 een twee bij twee matrix bestaande uit perioden van differentiaalvormen van de eerste en de tweede soort op de algebraïsche torus E.

Er bestaan drie vermoedens die gelden als leidraad voor heel wat onderzoek in de Algebraïsche Meetkunde. Ze slagen erin om een groot gamma van klassieke vragen in hun natuurlijke context te plaatsen. Het eerste vermoeden werd voor het eerst geopperd door Alexander Grothendieck. Het zegt dat er *één* (grote) lineaire algebraïsche groep G bestaat (de 'motivische absolute Galois groep'), over $\mathbf{Q}$, en voor elke X en i een lineaire representatie

$$h_i(X) : G \to \mathrm{GL}(b_i, \mathbf{Q})$$

zodanig dat $\rho_i(X)$ en $P_i(X)$ enkel van $h_i(X)$ afhangen. Men zegt dat h_i het onderliggende *motief* van ρ_i en P_i is. Het tweede vermoeden draagt meestal de naam van John Tate. Het zegt dat $h_i(X)$ uit $\rho_i(X)$ kan gereconstrueerd worden. Met andere woorden: dat in het overgaan van $h_i(X)$ op $\rho_i(X)$ geen informatie verloren gaat. Het derde vermoeden, het zogeheten *perioden-vermoeden*, is het analogon van het Tate vermoeden voor periode-matrices: het beweert dat ook $P_i(X)$ voldoende informatie bevat om $h_i(X)$ te reconstrueren.

Het Tate vermoeden neemt een centrale plaats in de moderne Aritmetische Meetkunde in. Het perioden-vermoeden generaliseert op zeer elegante wijze een aantal klassieke vermoedens omtrent de transcendentie van waarden van speciale functies.

Als deze vermoedens waar zijn, dan staan Galois-representatie en periode-matrix in direct verband en kan de een uit de ander worden afgeleid. Men kan dan bijvoorbeeld stellen dat Galois representatie van de periode $2\pi i$ de cyclotomische is, en *vice versa*. De transcendentie van $2\pi i$ is dan equivalent met het ontbreken van relaties tussen de tensormachten van de cyclotomische representatie.

t-Motieven. Zij nu k het lichaam met p elementen en K een lichaam van karakteristiek p, dat wil zeggen, een lichaam dat k bevat. Een (isogenieklasse van een) t-motief over K is een afbeelding

$$\sigma : K(t)^d \to K(t)^d : v \mapsto \sigma(v)$$

die additief is en die voldoet aan $\sigma(tv) = t\sigma(v)$ en $\sigma(\lambda v) = \lambda^p \sigma(v)$ voor alle $v \in K(t)^d$ en $\lambda \in K$, en nog wat andere voorwaarden.

Aan zo'n afbeelding σ kan men een Galois representatie

$$\rho_\sigma : \mathrm{Gal}(K^s/K) \to \mathrm{GL}(d, \mathbf{A}_{k[t]})$$

en, onder zekere voorwaarden, een periode matrix P_σ toekennen. Een stelling van Matt Papanikolas zegt dat er een lineaire algebraische groep G over $k(t)$ bestaat zodanig dat het geven van een t-motief σ (met bepaalde eigenschappen) equivalent is aan het geven van een lineaire representatie $G \to \mathrm{GL}(d, k(t))$. Een andere stelling van Taguchi en Tamagawa leert ons dat ρ_σ het t-motief σ volledig bepaalt. En een resultaat van Anderson tenslotte, impliceert dat in vele gevallen het t-motief σ door P_σ bepaald wordt. Dit zijn stuk voor stuk redenen om te geloven dat t-motieven de karakteristiek-p tegenhangers zijn van de (gehoopte) motieven.

Dit proefschrift. In dit proefschrift wordt een variant op Papanikolas' constructie van de groep G voorgesteld. Het resultaat is een directere definitie waarmee makkelijker te werken valt, en die ook nauwer aansluit bij het klassieke geval. Deze nieuwe constructie wordt gebruikt om de groep G te bestuderen. Zo wordt aangetoond dat in de exacte rij

$$1 \to G^0 \to G \to \pi_0(G) \to 1$$

de componentengroep $\pi_0(G)$ samenvalt met de absolute Galois groep van het basislichaam K, terwijl de samenhangende component van de identiteit G^0 de motivische absolute Galois groep is voor de separabele afsluiting K^s van K.

Verder wordt onderzocht in welke mate t-motieven weigeren uiteen te vallen in irreducibele delen. Ook dit levert nieuwe informatie over de structuur van de groep G.

Ten slotte worden ook zekere families van t-motieven beschreven. Deze zijn de tegenhangers van bepaalde Shimura variëteiten.

Over de gehele tekst wordt veel aandacht besteed aan de verschillen en overeenkomsten tussen motieven en t-motieven.