

Epiloog

De cirkel is rond

Onderwijs is een geweldig systeem met zijn eigen wetten van reactie op, en immuniteit tegen, maatregelen van buiten, een systeem dat zijn eigen leven leidt. Het is allesbehalve ongevoelig, het is geweldig vatbaar voor invloeden, als je maar weet waar en hoe, maar niemand weet het. Of veeleer: zij die het weten, weten niet dat ze het weten, en zij die denken dat ze het weten, kunnen zich schromelijk vergissen.

Freudenthal in de rede bij zijn afscheid als hoogleraar-directeur van het IOWO op 14 augustus 1976¹

De geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs laat grillige ontwikkelingen zien. Buitenlandse invloeden, leerplan-erfenissen, vanuit de politiek opgelegde vernieuwingen, druk van uitgeverijen en hun keuzes bij het uitgeven van leermethoden: de invloeden waren legio, divers en slecht te voorspellen. De volgende (waarschijnlijk Amerikaanse) grap schetst de ontwikkeling van de 'leessom' gedurende de afgelopen vijftig jaar:

Teaching Math in 1950: A logger sells a truckload of lumber for \$ 100. His cost of production is $\frac{4}{5}$ of the price. What is his profit?

Teaching Math in 1960: A logger sells a truckload of lumber for \$ 100. His cost of production is $\frac{4}{5}$ of the price, or \$ 80. What is his profit?

Teaching Math in 1970: A logger exchanges a set L of lumber for a set M of money. The cardinality of set M is 100. Each element is worth one dollar. Make 100 dots representing the elements of the set M . The set C , the cost of production contains 20 fewer points than set M . Represent the C as a subset of set M and answer the following question: What is the cardinality of the set P for profits?

Teaching Math in 1980: A logger sells a truckload of lumber for \$ 100. Her cost of production is \$ 80 and her profit is \$ 20. Your assignment: Underline the number 20.

Teaching Math in 1990: By cutting down beautiful forest trees, the logger makes \$ 20. What do you think of this way of making a living? Topic for class participation after answering the question: how did the forest birds and squirrels feel as the logger cut down the trees? There are no wrong answers.²

¹ Hans Freudenthal, 'Wiskunde-onderwijs anno 2000', *Christelijk Pedagogisch Studieblad* (1976) 42-46.

² De oorsprong van deze grap is helaas niet achterhaald, vooral doordat deze via internet wijdverspreid is.

Hoewel natuurlijk danig gechargeerd, is deze grap typerend voor de manier waarop de veranderingen in het wiskundeonderwijs beleefd werden: van de mechanistische recht-toe-recht-aan aanpak, via de verzamelingen-gekke van New Math naar de maatschappelijk verantwoorde, maar nauwelijks meer met ‘echte wiskunde’ verwante aanpak uit de jaren negentig. Deze schets is natuurlijk overdreven en niet zo direct van toepassing op de Nederlandse situatie, maar in grote trekken komen beide ontwikkelingen wel degelijk overeen.

In het Nederlandse wiskundeonderwijs van de jaren negentig leek het pleit definitief beslecht in het voordeel van het zogenaamde ‘realistische wiskundeonderwijs’. Het IOWO was – via de vakgroep ‘Onderzoek Wiskunde onderwijs en Onderwijscomputercentrum’ – uitgegroeid tot het ‘Freudenthal Instituut’ en het realistische wiskundeonderwijs dat daar in de geest van Freudenthals gedachtegoed ontwikkeld werd, genoot wereldfaam.³ Het leek alsof de vooroorlogse strijd tussen de voorstanders van een logisch deductieve aanpak en de voorstanders van een intuïtieve aanpak definitief in het voordeel van de laatsten was beslecht.⁴

Maar er waren ook tegengeluiden te horen: kinderen zouden geen echte wiskunde meer leren, maar blijven hangen in een nooit ophoudende praktisch-realistische inleiding. In een artikel in *NRC/Handelsblad* naar aanleiding van zijn inaugurele rede noemde F.J. Keune de schoolwiskunde “zo plat als een pannenkoek”.⁵ Een heftige discussie tussen voor- en tegenstanders van realistisch wiskundeonderwijs volgde, waarin Keune zowel vanuit de lerarenhoek als vanuit de universiteit bijval kreeg.

Het leek, alsof de logisch-deductieve stroming een nieuwe opleving meemaakte. Was de cirkel weer rond? Moest er teruggegaan naar Bourbaki, of – weer dertig jaar eerder – naar Dijksterhuis cum suis? Had Freudenthal dan uiteindelijk toch niet ‘gewonnen’?

Dit zijn de verkeerde vragen. Tussen de theorie van realistisch wiskundeonderwijs en de onderwijspraktijk – of: de indruk die die praktijk maakte – was een groot verschil. Realistisch wiskundeonderwijs houdt niet op bij ‘het leren van wiskunde aan voorbeelden’, zoals ook door voorstanders van dat wiskundeonderwijs al werd aangedragen. De term ‘realistisch’ hield ook zeker niet in dat er geen plaats zou zijn voor abstractie, of dat er geen aandacht zou zijn voor het bewijzen van stellingen. De discussie ging dan ook niet over het voor of tegen ‘Freudenthal’ (of: de met zijn gedachtegoed geassocieerde stroming) zijn, maar betrof het Nederlandse wiskundeonderwijs: dat wat er in de praktijk van realistisch wiskundeonderwijs terecht kwam.⁶

3 N. van Dam, “Ze rekenen ons alles aan wat mis is”. De aparte status van het Freudenthal Instituut’, *Het Onderwijsblad* (2003); als elektronisch tijdschrift beschikbaar en geraadpleegd.

4 Zie ook de eindconclusie in: K. Gravemeijer en J. Terwel, ‘Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory’, *Journal of Curriculum Studies* 32 (2000) 777-796, 792.

5 ‘Pannenkoekwiskunde’, *NRC/Handelsblad* (25 april 1998). Keune, hoogleraar algebra in Nijmegen, pleitte in zijn inaugurele rede voor meer aandacht voor abstractie en logisch redeneren om het Nederlandse wiskundig talent dat met de realistische aanpak verloren zou gaan, beter te benutten.

6 Ook Keune bleek zich goed te kunnen vinden in de in een gesprek aan hem voorgelegde selectie van ideeën en uitgangspunten uit Freudenthals werk. Zijn kritiek betrof dan ook voornamelijk het uitvergroten van één aspect (het realistische) van de wiskundendidactiek in het wiskundeonderwijs; gesprek met F.J. Keune, 29 april 1999.

Zonder verder in te gaan op de vraag, in hoeverre realistisch wiskundeonderwijs in het huidige wiskundeonderwijs op de juiste wijze geïmplementeerd is, moet voorop gesteld worden dat de discussie het gelijk of ongelijk van Freudenthal nauwelijks raakt. Het is zelfs aannemelijk dat Freudenthal in deze discussie ook het standpunt voor ‘meer echte wiskunde’ zou innemen – in ieder geval voor de betere leerling. Immers: voor hem was het realistische aspect ook slechts een uitgangspunt, voor sommige leerlingen weliswaar ook direct het eindpunt, maar idealiter een eerste stap in het wiskundeonderwijs op weg naar wiskunde, naar het ontdekken van logische verbanden, naar bewijzen, tot axiomatiseren aan toe, op elk niveau:

Yes, I told you there are so many kinds of understanding in mathematics. At every moment you may believe you have just reached ultimate understanding of some subject, such that nothing is left to be desired. But no, there is no ultimate understanding in mathematics, you can understand any problem in an ever larger context, from an ever higher point of view, and finally – it looks the lowest of all, but perhaps it is the highest – you can learn to understand it in the perspective of the learning child, and this is what happened many times to me.⁷

Bij nagenoeg alle stromingen in de discussie over wiskundeonderwijs stond uiteindelijk steeds het uitdragen van *wiskunde* voorop. Ook voor Freudenthal gold dat ‘leren wat wiskunde was’ tot op zeker niveau haalbaar moest zijn voor elke leerling. Het ‘leren wiskunde bedrijven’ was voor hem daarbij net zo belangrijk als het realistische aspect als startpunt.⁸

Op 14 augustus 1976 nam Freudenthal afscheid als hoogleraar-directeur van het IOWO. Het IOWO bestond op dat moment vijf jaar. Freudenthal kende zich in zijn afscheidsrede de rol van IOWO-grootvader toe: niet meer direct betrokken bij de kleine en grotere besommeringen en zorgen, maar met een zekere afstand genietend en de vruchten plukkend van het werk dat er gedaan werd. Hij blikte terug op zijn rol in het IOWO:

Als ik terugkijk op mijn activiteit bij het IOWO en U me vraagt wat ik denk dat mijn belangrijkste bijdrage was, dan zeg ik: hun met mijn gezag als wiskundige garanderen dat hetgeen zij aan het ontwikkelen waren, echte wiskunde is, dat om jezelf als wiskundige waar te maken, je geen minderwaardigheidscomplexen bij anderen hoeft te kweken door middel van verzamelingenleer, propositie-calculus, groepentheorie, vectorruimten en andere hoogdravende onverteerde theorie, dat je wiskunde overall kunt ontdekken, met je blote oog en je gezond verstand, dat het het kenmerk van wiskunde is, zo voor zich zelf te spreken, dat je je niet hoeft uit te sloven, om anderen ervan te overtuigen dat het waard is, om te kennen, te leren, te onderwijzen.⁹

7 Freudenthal, ‘Teacher training – an experimental philosophy’, *Educational Studies in Mathematics* 8 (1977) 369-376, aldaar 374.

8 Streefland betitelde Freudenthal als zijnde verantwoordelijk voor het ontstaan van ‘wiskunde als activiteit’ als theorie; L. Streefland, ‘Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron’, *Nieuwe Wiskrant* 5 (1985) 60-67.

9 Freudenthal, ‘Wiskunde-onderwijs anno 2000’, *Christelijk Pedagogisch Studieblad* (1976) 42-46, aldaar 45.

Met deze – gemakkelijk als provocerend interpreteerbare – uitspraken leek hij op het eerste gezicht onomwonden te pleiten voor de ‘knip-en-plak-wiskunde’ die in de jaren negentig zo onder vuur zou komen te liggen. Maar Freudenthals credo ‘doe maar gewoon (wiskunde), dan doe je al gek genoeg’ was zeker geen pleidooi voor een eeuwigdurende intuïtieve knip-en-plak-inleiding in plaats van ‘harde wiskunde’. De te leren wiskunde moest voor hem uiteindelijk ook wel degelijk echte, correcte en relevante wiskunde zijn.

Bovendien moest deze als een activiteit, een wijze van denken door de leerling beleefd worden. Op die manier onderwezen, was wiskunde een voor iedereen onmisbaar element in de opvoeding, op dezelfde manier als dat het onmisbaar was in de maatschappij: “vraag niet hoeveel wiskunde een kind kan slikken, vraag wel op welke wijze wiskunde in het onderwijs kan bijdragen tot de menselijke [sic] waardigheid van het kind”, zo sprak hij in dezelfde rede.¹⁰

Het *10wo* was voor Freudenthal de belichaming van zijn theorie over wiskundededidactiek. Of beter nog: de belichaming van de *weg* tot die theorie over wiskundededidactiek. Over die *weg* schreef hij niet veel later zijn boek *Weeding and sowing*, ‘voorwoord tot een wetenschap van wiskundeonderwijs’.¹¹

Na zijn afscheid in 1976 braken geen jaren van rust en met voldoening terugzien aan voor Freudenthal. Waarschijnlijk werkte Freudenthal juist meer dan ooit aan wiskundeonderwijs en -didactiek, onderwijl nieuwe elementen aan zijn gedachtegoed toevoegend, andere herziend of aanscherpend. Twee boeken en een kleine tweehonderd artikelen over wiskundeonderwijs schreef hij in die laatste vijftien jaar van zijn leven. Bijna dagelijks was hij op het instituut te vinden. De wiskundeonderwijs-Freudenthal van 1975 zoals die gepresenteerd is in dit onderzoek is op veel punten zeker niet de ‘definitieve’ Freudenthal, maar aan de richting waarin en de wijze waarop hij zocht naar wiskundeonderwijs zou niet veel fundamenteels meer veranderen.¹²

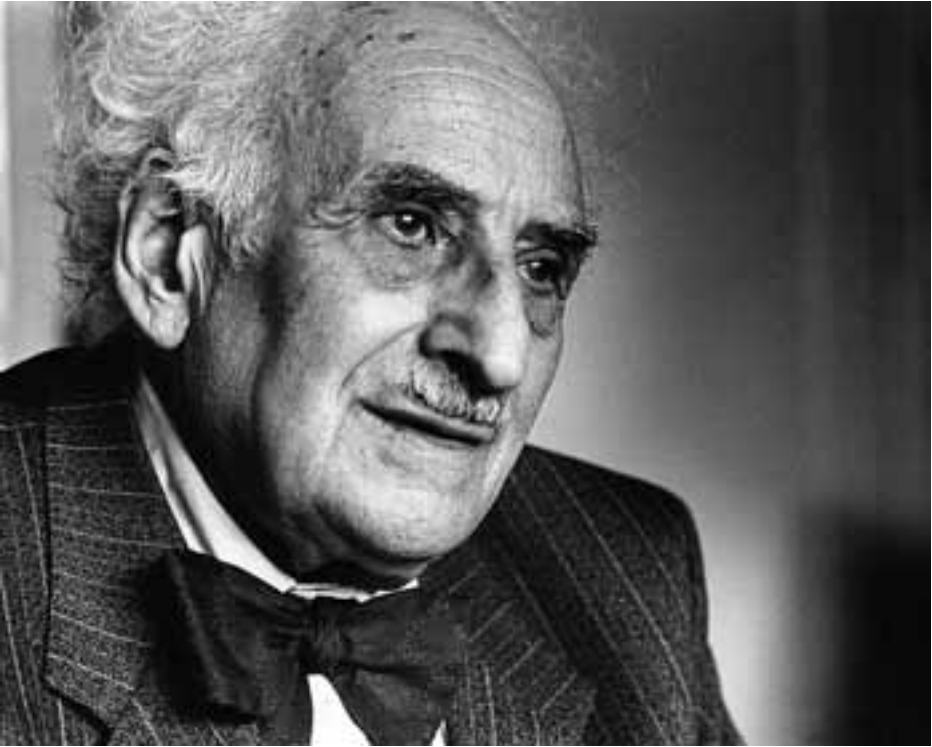
In 1977 keek hij in een brief aan zijn Poolse vriendin Krygovska terug op zijn werkzaamheden in het wiskundeonderwijs. Hij drukte haar op het hart vertrouwen te hebben in de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs en de invloed die haar ideeën daarop zouden hebben. Hun werk zou niet tevergeefs blijken volgens Freudenthal:

Voici la différence entre votre tristesse et la mienne: la vôtre est ce que vous craignez que ce que vous avez semé, n’aille germer ou soit étouffé par de mauvaises herbes – la mienne, que je ne verrai plus la moisson. Soyez sûre qu’elle sera riche. Ayez plus de

10 Ibid., 46.

11 Freudenthal, *Weeding and sowing*.

12 Meetkundeonderwijs en breukenonderwijs zijn maar enkele voorbeelden van onderwerpen uit het wiskundeonderwijs die in de jaren zeventig nog volop bij Freudenthal in ontwikkeling waren. De invloeden van pedagogen en leerpsychologen als Carpay, Van Parreren, Gal’perin en Davydov op Freudenthals werk zouden ook pas goed in de navolgende periode bekeken kunnen worden. Hetzelfde gold voor zijn internationale contacten en vriendschappen met gelijkgestemde didactici zoals die met Krygovska, Josette Adda, Christine Keitel en de invloed die zij op het werk van Freudenthal hadden.



Freudenthal poserend voor de achterflap van zijn autobiografie *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven* (1986).

confiance! Ce que nous avons créé, tant peu que ce soit, survivra. Vous vous croyez vieille? Se vêtir à la mode ne démontre pas qu'on soit jeune. À notre âge on peut être plus jeune que ceux qui dès le début n'étaient que des vieillards.¹³

Vertrouwen! Zo sprak hij Krygovska moed in. En ook: met de heersende mode meedoen, wil nog niet zeggen dat je jong bent. Freudenthal was ervan overtuigd, dat er geogst zou worden van hetgeen hij – hoe tegendraads ook! – zaaide.

En oogsten was vijftien jaar later zeker aan de orde. Zijn naam is dan gekoppeld aan het Freudenthal Instituut, dat nationaal de toon zet en internationaal aanzien geniet. Ook werd Freudenthals naam verleend aan een door de ICMJ ingestelde prijs voor “outstanding achievement in mathematics education research”.¹⁴ Als het gaat om wiskundeonderwijs is Freudenthal *zelf* een instituut, waar een ieder die zich met dat onderwijs bezig houdt niet omheen kan.

13 Freudenthal aan Krygovska, 24 november 1977. Hoezeer zij op een lijn zaten, bleek uit een andere brief van Freudenthal aan Krygovska een paar jaar later: “En dehors de l'owto il n'y a personne qui comprenne et interprète mes idées comme vous et qui y ajoute des arguments et des aspects essentiels”; Freudenthal aan Krygovska, 29 april 1980; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 47.

14 Dit is de zogenaamde ‘Hans Freudenthal Medal’ uitgereikt in oneven jaren als erkenning voor “a major cumulative program of research”.

Maar op zijn lauweren rusten was voor Freudenthal nooit aan de orde. Hij schreef, enkele weken voor zijn overlijden, aan de Duitse wiskundedidacticus Hans Steiner (1928-2004):

Ich habe weiterhin große Pläne. Mit dem Computer geht es ja rasend schnell – so schnell wie man spricht oder denkt. Allmählich wird man ein lebender Mythos.[...] Mir geht es augenblicklich so gut wie kaum je in den letzten zehn Jahren.¹⁵

Enkele weken later stierf Freudenthal, gezeten op een bankje in het park in Utrecht, waar hij werd gevonden door spelende kinderen. Hetzelfde park, waar hij jaren eerder zo vaak met zijn kleinzoon wandelde. Wandelingen, waarin de kiem voor het observeren van kinderen lag.

De cirkel is rond.

15 Freudenthal aan H.G. Steiner, 21 september 1990; RANH, Hans Freudenthal Papers, inv.nr. 71.